Kapitel 1
Einleitung und Überblick

1.1 DIE NATUR DES SCHACHBRETTS

Wenngleich der physikalische Raum drei Dimensionen hat, gibt es doch viele Situationen, in denen von der Logik der Sache her und für die Wahrnehmung nur zwei Dimensionen eine Rolle spielen, die sich also subjektiv in der Ebene abspielen. Gewisse Gebrauchsgegenstände, z. B. Stoff oder Papier, werden nur nach Länge und Breite betrachtet, weil die Dicke keine Rolle spielt. Insbesondere bei der Fortbewegung in der Ebene haben wir häufig nur zwei Dimensionen im Blick. Dies ist auch die Perspektive des Schachspiels: für den Kampfplatz werden nur Länge (Tiefe) und Breite betrachtet, während die Höhendimension als irrelevant gilt.

Was nun dieses zweidimensionale Gebilde Schachbrett ist, scheint vollkommen klar und einfach zu sein: offenbar ist das Schachbrett eine quadratische Fläche. In der Ausdrucksweise der FIDE-Schachregeln (Deutscher Schachbund 1997) wird das Schach auf „einem quadratischen Spielbrett" gespielt, und dieses besteht „aus einem 8×8-Gitter von 64 gleich großen Quadraten, die abwechselnd hell und dunkel sind (die ‚weißen' und die ‚schwarzen' Felder)." (Art. 1 und 2). Halten wir die Eigenschaften des durch die Regeln vorgegebenen Bretts fest:

<1-1> Eigenschaften des „praktischen" Schachbretts:

(a) Das Schachbrett besteht aus 64 Feldern, angeordnet in zwei Dimensionen zu 8 mal 8 Feldern.
(b) Die Achsen des Bretts (Linien und Reihen) stehen orthogonal (rechtwinklig) aufeinander.
(c) Die Felder selbst sind gleich groß und quadratisch, d. h. Linien und Reihen haben jeweils gleichen Abstand voneinander.
(d) Die Felder sind (innerhalb der Linien und der Reihen) abwechselnd hell und dunkel gefärbt (wobei es natürlich nicht auf die speziellen Farben, sondern nur auf die Unterscheidbarkeit ankommt).

Bei dem eben beschriebenen Brett handelt es sich, wenn man von der Festlegung auf gerade 64 Felder absieht, um das allgemein vertraute Design des „Schachbrettmusters".

Aber trotz der verbindlichen Regelformulierung und trotz des kulturell bemerkenswerten Schachbrettmusters: Das Schachbrett ist, von der Logik des

Schachspiels her gesehen, weder eine Fläche noch ein Quadrat im geometrischen Sinne, noch hat die Schwarz-Weiß-Färbung eine konstitutive Bedeutung. Ich habe das Schachbrett <1-1> als „praktisches" Brett bezeichnet, da es in dieser Form durch die Spielregeln vorgegeben und wirklich benutzt wird, aber nicht unbedingt der Logik des Schachspiels entsprechen muss. In der Tat – wie in Band 1 zur Genüge deutlich wurde – sind die tradierten Beschreibungen der Schach-Spielregeln, obwohl sie eindeutig zu verstehen sind, für die wissenschaftliche Erfassung des Schachspiels teilweise unzulänglich, indem die für das Spielergebnis (Matt, Remis) wichtigen „konstitutiven" Regeln mit Vorschriften vermischt sind, denen andere, praktische Motive zugrundeliegen. So ist es auch beim Schachbrett: Wie wir sehen werden, ist von den in <1-1> genannten Eigenschaften überhaupt nur (a) konstitutiv und für die Theorie wichtig, während die übrigen nur Hilfsmittel für das praktische Spielen sind und für die adäquate theoretische Erfassung des Schachs sogar irreleitend sein können.

Vielleicht ist es dem Leser selbst schon einmal aufgefallen, dass die Rede vom Schachbrett als Quadrat im Sinne einer „Fläche" einige Ungereimtheiten mit sich bringt. Zum Beispiel bestehen die (Haupt-)Diagonalen des Schachbretts (die Diagonalen a1–h8 und a8–h1) aus 8 Feldern; es gilt hier also: Diagonale = Seitenlänge, während allgemein die Diagonalen eines Quadrats von der Seitenlänge a die Länge $\sqrt{2} \times a$, hier also $\sqrt{2} \times 8$ betragen, also auf jeden Fall größer als 8 sein müssten. Ähnliches gilt für den Umfang des Bretts, der im geometrischen Quadrat 4a, d.h. $4 \times 8 = 32$ wäre, auf dem Schachbrett aber nur 28 Felder hat.

Unsere erste Aufgabe besteht also darin, das durch die Spielregeln vorgegebene Schachbrett auf seinen funktionalen Gehalt zu reduzieren, das heißt das Schachbrett rein in seinen konstitutiven Bestandteilen zu beschreiben, also das „konstitutive Schachbrett" darzustellen. Das heißt, wir werden das Minimum an Struktur des Bretts bestimmen, das absolut notwendig ist, um den übrigen konstitutiven Spielregeln Genüge zu tun und alles weglassen, was darüber hinaus geht; insbesondere muss herausgestellt werden, was am Schachbrett lediglich der Erleichterung der Wahrnehmung dient oder aus sonstigen, etwa historischen Gründen übernommen ist, im Unterschied zu demjenigen, das zur Durchführung einer Partie logisch unerläßlich ist.

Die Aufgabe hängt eng zusammen mit der Frage der *Repräsentation,* also der anschaulichen Darstellung des Schachbretts. Da das Schachspiel ein reales Kriegsgeschehen darstellt, ist es von Natur aus räumlich. Während aber der wirkliche Kampf mit Elefanten, Streitwagen usw. sich im „wirklichen" geometrischen Raum abspielt, so muss die symbolische Darstellung nicht notwendig alle Eigenschaften der materiellen Wirklichkeit abbilden.

Die erste Frage ist, was die Felder des Schachbretts ihrer Funktion nach sind, was sie also gemeinsam haben, so dass wir sie unter dem Begriff der

„Felder“ zusammenfassen. Welche Funktion also haben die Felder des Schachbretts? Sie fungieren als Standorte oder *mögliche Standorte der Steine*, und die Züge bestehen aus der Bewegung der Steine von Feld zu Feld. Damit wird eine erste Eigenschaft der Schachfelder deutlich: sie sind keine Quadrate, also keine Flächen, denn auf einem Feld gibt es keine Bewegung: selbst wenn beliebig kleine Figürchen *auf* noch so großen Feldern stehen, kann man sie allenfalls ungenau aufstellen, aber keinen Zug auf einem Feld machen. Die Felder haben also – in ihrer Funktion für das Spiel – keine Ausdehnung, sondern sind schlicht *Punkte*.

Zweitens aber sind die Felder keine Punkte im Sinne des beliebig teilbaren Kontinuums, denn im Schach gibt es eine absolute kleinste Einheit: den Schritt zum nächsten Feld. Zwar kann ein Stein von einem Feld zum „nächsten“ oder zum „übernächsten“ Feld usw. ziehen, zum Beispiel kann ein Turm von a1 nach a2, dann nach a3 und schließlich nach a8 gehen. Aber diese „Strecke“ a1–a8 ist nicht weiter teilbar, sondern umfasst genau 7 Schritt-Einheiten. Dies gilt übrigens für beliebig große Schachbretter m × n: Die Bewegungen im Schach und damit auch die Felder-Punkte sind immer *diskret*: Man kann 1, 2, 3 … Schritte tun, aber nicht halbe oder viertel und schließlich beliebig kleine Schritte, so wie eine Familie 1, 2, 3 …, aber nicht 2½ Kinder haben kann. Dem entsprechend wäre es auch sinnlos, einen Schachzug in einer metrischen Einheit anzugeben, obwohl jeder konkret auf einem materiellen Schachbrett ausgeführte Zug natürlich eine gewisse physikalische Distanz überwindet, doch hat diese nichts mit dem Schachzug zu tun: Eine Angabe wie „Der Turm zieht 6 cm weit nach rechts“ bezeichnet keinen Schachzug. Selbst wenn alle Schachbretter auf der Welt die gleiche Abmessung hätten, oder wenn jedes Schachbrett mit einer Maßstabsangabe versehen wäre: eine metrische Zugangabe ginge immer am Wesen der Schachfelder vorbei, denn die metrischen Angaben müssten doch immer nur reduziert werden in das eigentliche Maß, nämlich das „nächste“ oder „übernächste“ oder welches Feld auch immer.

Die Schachbrett-Felder sind also *diskrete Punkte*, die zwar, wie wir gleich sehen werden, in einer gewissen Ordnung zueinander stehen, aber nicht durch metrische Beziehungen verbunden sind. Für die Repräsentation des Schachbretts bedeutet das, dass die üblichen kleinen (schwarz-weißen) Quadrate nur Punkte bedeuten und somit ebenso als Pünktchen oder kleine Kreise usw. dargestellt werden könnten. Zweifellos könnte man auf Brettern wie in Abbildung 1-1 Schach spielen.

Was man zum Schachspiel braucht, sind lediglich Symbole, die die 8×8 Punkte andeuten, auf die Steine gestellt werden können, aber nicht unbedingt Quadrate. Zum Beispiel könnte man die Steine auch auf Schnittpunkte von gezeichneten Linien setzen wie es beim chinesischem Schach und

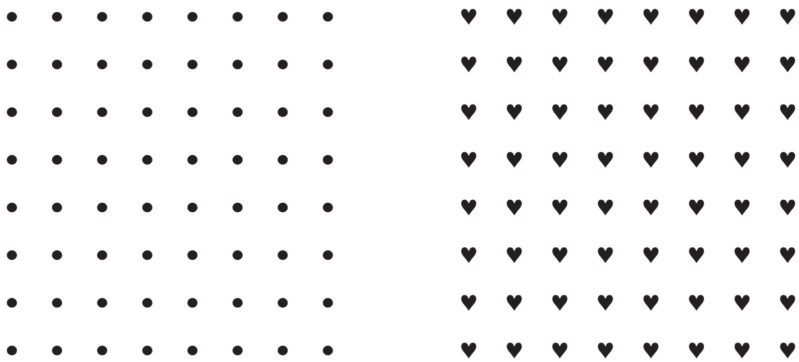


Diagramme 1-1: Schachbretter aus Punkten oder anderen Symbolen

beim japanischen Go-Spiel der Fall ist. Man wird feststellen, dass das Schachspiel auf solchen „Brettern" vielleicht mühsamer – insbesondere weil die Schwarz-Weiß-Färbung wegfällt – aber doch ohne jede funktionale Einschränkung möglich ist. Darüber hinaus werden wir später sehen, dass die Felder keineswegs geradlinig und mit gleichen Abständen voneinander angeordnet sein müssen und dass auch die Schwarz-Weiß-Färbung nur ein Hilfsmittel für unsere Wahrnehmung ist.

Das Schachbrett ist insofern ein Gegenstand der *Topologie* im Sinne der Mathematik als die Topologie von Abständen, Winkeln usw. abstrahiert und die geometrischen Gebilde nur unter dem Gesichtspunkt der Nachbarschaft und der Begrenzungen betrachtet. Gleichwohl werden wir in der Schachgeometrie den Terminus „Topologie" in einem eingeengteren Sinne benutzen, s. Kapitel 9.

Welcher Art ist nun die Ordnung, die die Schachfelder darstellen? Es ist die bloße Aufzählung von Objekten nach einer festgelegten Reihenfolge, etwa einer Rangreihe: man nimmt ein bestimmtes Objekt als Anfang und bezeichnet es als „das erste"; das „nächste" Objekt ist dann „das zweite", danach kommt „das dritte" oder „übernächste" usw. bis zum „letzten" oder „n-ten" Objekt. Genau dies ist der Sinn, wenn man den Feldern des Schachbretts in einer Dimensionen die Zahlen 1, 2, …, 8 zuschreibt. Allgemein spreche ich hier von einer *n-Anordnung*, d. h. einer einfachen Reihe

$$\text{min}, \text{min}+1, \text{min}+2, \ldots, \text{max},$$

wobei min die kleinste und max die größte Ordnungsnummer (Koordinate) ist.

Die einfache n-Anordnung wird zum $n \times n$-Schachbrett, wenn man zwei solcher Anordnungen multiplikativ zueinander anordnet; „multiplikativ", d. h. dass einem Mitglied einer Anordnung X jedes Mitglied der zweiten Anordnung, Y, zugeordnet wird (Weiteres hierzu s. 3.1). Insgesamt sind wir nun zu folgendem Ergebnis gekommen:

<1-2> Das konstitutive Schachbrett:
Das zum Ausführen von Schachpartien erforderliche *Schachbrett* ist nichts weiter als eine multiplikative Anordnung zweier ordinaler Reihungen von je 8 Punkten. Alle übrigen Eigenschaften (quadratische Felder, Gradlinigkeit, Felderfärbung u. a.) sind psychologisch oder ästhetisch bedingte Zutaten, die den Spielbaum nicht tangieren.

1.2 NATÜRLICHE KOORDINATENDARSTELLUNG UND LAGEBESTIMMUNGEN DES SCHACHBRETTS

Die allgemein übliche Darstellung eines n × n-Schachbretts numeriert die Felder in beiden Dimensionen von 1 bis n. Diese Numerierung bezeichne ich als die natürlichen Koordinaten oder kurz als das *natürliche Schachbrett,* nicht nur weil es mit den natürlichen Zahlen im mathematischen Sinn operiert, sondern weil die Auffassung „das erste Feld, das zweite Feld usw." dem rein ordinalen Charakter der Anordnung der Felder vollkommen adäquat ist.

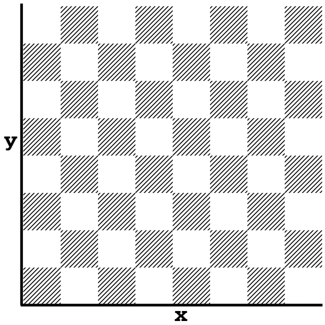
1n	2n	3n	4n	5n	6n	7n	8n	…	nn
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
18	26	38	46	58	68	78	88	…	n8
17	27	37	47	57	67	77	87	…	n7
16	26	36	46	56	66	76	86	…	n6
15	25	35	45	55	65	75	85	…	n5
14	24	34	44	54	64	74	84	…	n4
13	23	33	43	53	63	73	83	…	n3
12	22	32	42	52	62	72	82	…	n2
11	21	31	41	51	61	71	81	…	n1

1-2
Natürliche Koordinatendarstellung des n × n-Schachbretts

Die erste Koordinate bezeichnet dabei die „Linien", ist also die *Linien-Koordinate*, die zweite bezeichnet entsprechend die „Reihen" und ist somit die *Reihen-Koordinate* eines Feldes. Der besseren Unterscheidbarkeit wegen ist es üblich, die Linien-Koordinate statt der Zahlen durch die Buchstaben *a, b, …, h* zu bezeichnen. Soweit es nur um die Identifikation einzelner Felder auf dem herkömmlichen Schachbrett geht, benutze ich die eingeführten Felderbezeichnungen wie a1, h6 usw. Der Gebrauch der Buchstaben ist aber nicht sinnvoll, sobald man genauer über die Beziehungen der Felder spricht.

Die natürliche Koordinatendarstellung des Bretts unterscheidet sich von der Darstellungsweise der klassischen Geometrie, dem cartesischen Koordinatensystem (vgl. Diagr. 3-7), das positive und negative Koordinaten um einen Nullpunkt anordnet. Dass die natürliche Auffassung den Nullpunkt vermeidet, hat seinen Grund in der nur ordinalen Natur der Felder, s. 2.1.

Vom cartesischen Koordinatensystem lassen sich aber die Achsen und ihre Bezeichnungen übernehmen, so dass wir zu der folgenden Darstellung des natürlichen Schachbretts kommen:



1-3
Die Dimensionen (**x** und **y**) des Schachbretts

Felder schreiben wir als

$$f = \langle f_l,f_r \rangle \text{ oder } \langle f_x,f_y \rangle, \text{ kurz auch } \langle l,r \rangle \text{ oder } \langle x,y \rangle$$

– die spitzen statt der üblichen runden Klammern sollen hervorheben,dass wir es nur mit ordinalen Werten zu tun haben – wobei die *Koordinate* l die Linien- (also die üblicherweise durch Buchstaben bezeichnete Nummer) und r die Reihen-Ordnungsnummer des Feldes bedeutet. Dieser im Schach eingebürgerte Gebrauch, die Nummer der Linie als *erste* Koordinate zu schreiben, entspricht der in der Geometrie üblichen Reihenfolge von x- und y-Koordinate. In der natürlichen Koordinatenbezeichnung ist das Anfangsfeld der beiden Anordnungen <1,1> (bzw. Feld a1).

Dass ich statt der Termini „Linien-“ und „Reihenkoordinate“ die Koordinaten primär als x und y bezeichne, hat folgenden Grund. Ein Begriff wie „Linienkoordinate“ führt, anders als das einfache „x-Koordinate“, eine Vermischung mit dem Begriff der Achse oder Dimension mit sich, denn „Linie“ meint eine Parallele zur x-Achse. Von daher kann es zu Unklarheiten bei der Bezeichnung der Dimensionen kommen. Nehmen wir die Horizontale, die wir als „Reihen-Dimension“ bezeichnen, weil sich in dieser Achse, der x-Achse, die Reihen *erstrecken*. Wenn man aber auf die Indizes achtet, also darauf, was *gezählt* wird, so würde man eher sagen, die x-Achse sei die „Linien-Dimension“. denn die Markierungen in dieser Achse bedeuten ja die Linien-Nummern, also a-Linie, b-Linie bzw. Linie 1, Linie 2 usw. Ebenso in der Vertikalen: in der y-Achse erstrecken sich die Linien, *gezählt* werden aber die Reihen. Hier soll definitorisch die Bezeichnung der Dimensionen *nach der Erstreckung* gewählt werden: die Vertikale ist als die „Linien“-, die Horizontale die „Reihen-Dimension“. Einfacher ist es daher, auf die semantisch unbelasteten und völlig eindeutigen Termini der x- und y-Koordinaten zurückgehen.

Interpretation der Dimensionen

Wie gesagt hat das Schachbrett eine natürliche räumliche Interpretation als *Fläche*, also als eine Erstreckung in zwei *Dimensionen* (ich benutze den

Begriff der Dimension statt des an sich gleichwertigen Begriffs „Achse“, da ich den Terminus Achse in einem spezielleren Sinn gebrauche, s. Kap. 4). Allgemein bezeichnet man die zwei Dimensionen der Ebene als Horizontale/Vertikale (Waagrechte/Senkrechte), Tiefe/Breite, Höhe/Breite, oder ähnlich; auch wäre eine Bezeichnung in Analogie zu den Himmelsrichtungen, also Nord/Süd und Ost/West, möglich. Für eine qualifizierende Unterscheidung der beiden Dimensionen gibt es keine Gründe, so lange man das Brett ohne Steine betrachtet. Denkt man aber z.B. an die Anfangsstellung, so bietet sich eine unterscheidende Interpretation an: In der einen Dimension, nämlich den „Linien“, stehen sich die feindlichen Heere gegenüber, während sich in der anderen, in den „Reihen“, die beiden Heere selbst erstrecken. Will man Linien- und Reihendimension auf die allgemeinen Raumbestimmungen beziehen, so kann man sie mit der Alternative Vertikale/Horizontale oder Tiefe und Breite identifizieren.

Die Interpretation der einen Dimension als Vertikale oder Senkrechte mit den Polen oben/unten bietet sich besonders an, wenn man das Schachbrett als Diagramm in einem Buch vor Augen hat. Ähnlich fängt man im allgemeinen Sprachgebrauch beispielsweise beim Schreiben auf ein Blatt Papier „oben“ an, der Brief„kopf“ ist oben und die „Fuß“note “unten”. In mancher Hinsicht ist diese Sichtweise nicht so überzeugend: Nehmen wir etwa den Standpunkt einer bestimmten Partei ein, etwa das „Lager“ der weißen Steine in der Anfangsstellung; die Vertikale stellt sich für Weiß primär als *Angriffs-Dimension*, also als „Tiefe“ mit den Richtungen *vorwärts* (nach vorne), d.h. hin-zum-Feind bzw. *rückwärts* (oder „zurück“, „nach hinten“), d.h. hin-zum-eigenen-Lager dar. In dieser Perspektive wäre die Polung „oben/unten“ weniger überzeugend. Allerdings ist diese angriffsbezogene Terminologie nicht immer angebracht; wenn zum Beispiel keine Bauern mehr auf dem Brett sind, kann sich die Orientierung des Angriffs in die andere Dimensionen verlagern (vgl. 10.2). Die Interpretation dieser Dimension als Vertikale ist daher allgemeiner. Die Interpretation der „horizontalen“ als rechts und links scheint dagegen keine Fragen aufzuwerfen.

Die Pole der „Vertikalen“ sind *oben* und *unten*, die der „Horizontalen“ *rechts* und *links*. Die folgende Tabelle fasst die übliche bzw. die hier benutzte Terminologie der Lagebestimmungen zusammen.

	x-Achse	y-Achse
Raum-Dimension	Horizontale	Vertikale
Pole/Richtungen	links/rechts	unten/oben
Schachbrett-Dimension	Reihen-Dimension	Linien-Dimension
Koordinaten	die erste Koordinate (x- oder Linien-Koordinate)	die zweite Koordinate (y- od. Reihen-Koordinate)

Tab. 1-1: Lagebestimmungen und Bezeichnungsweisen im natürlichen Schachbrett

1.3 ÜBERBLICK ÜBER DIE SCHACHGEOMETRIE

Das „konstitutive Schachbrett“ <1-2> ist die gegebene Grundlage der Schachgeometrie. Alle weiteren „schachgeometrischen“ Begriffe werden auf dieser Grundlage definiert. Wenn ich in diesem Buch gelegentlich von der „(klassischen) Geometrie“ spreche, so ist damit die einfache Analytische Geometrie der Ebene gemeint, also die Lehre von Gerade, Dreick, Kreis usw. in einem Koordinatensystem. Gegenstand der Schach(brett)-Geometrie sind die Beziehungen der Felder zueinander. Wie es im Schach grundsätzlich der Fall ist (s. Band 1, 2.4), haben auch die räumlichen Sachverhalte, eben die gegenseitigen Beziehungen von Feldern, einen *zuständlichen* und einen *prozessualen* Aspekt. Der Zustandsaspekt ist hier die *Relation* oder *Nachbarschaft* zweier Felder, während der prozessuale Aspekt die *Bewegung* von Feld zu Feld ist.

Der Schlüsselbegriff zur Analyse der Beziehung zweier Felder ist der *Vektor*, d.h. die Differenz der Koordinaten in beiden Dimensionen. Der Vektor der beiden Felder a3 und g6 beispielsweise ist [+6, +3]. Dies ist die formale Fassung der Felderbeziehung; unter dem *Zustands*aspekt bedeutet dieser Vektor, dass Feld g6 (in der Horizontalen) der 6. rechte und zugleich (in der Vertikalen) der 3. obere Nachbar von Feld a3 ist. Unter dem *Geschehens*aspekt bedeutet der Vektor [+6, +3] eine Bewegung um 6 Felder nach rechts und 3 Felder nach oben.

Aus den Vektoren wird zunächst eine systematische *Klassifikation* entwickelt. Die oberste Unterscheidung ist die nach *geraden* und *schrägen* Vektoren. So wie die geraden Vektoren in *horizontal* und *vertikal* zerfallen, gibt es bei den Schrägvektoren aufsteigende und absteigende; im 8×8-Brett ist beispielsweise die große schwarzfeldrige Diagonale – „*diagonal*“ ist die wichtigste Kategorie unter den Schrägvektoren – „aufsteigend“ und die weißfeldrige „absteigend“.

Die Vektoren sind nicht eine bloße Anhäufung von Beziehungen, sondern bilden ein wohlstrukturiertes System, in dem bestimmte Mengen von Vektoren in andere Vektorenmengen transformierbar sind und zwar durch drei Arten von *Umkehrungen*: Richtungs- Steigungs- und Neigungsumkehr. Aus dem Vektorbegriff lassen sich die beiden zentralen Begriffe der Schach-Geometrie entwickeln: der *Strahl*, der das Analogon zum klassischen Begriff der Geraden darstellt, und der *Ring* als Pendant zum klassischen Begriff des *Kreises*.

Während in der klassischen Geometrie die Geraden stufenlos jede Steigung annehmen bzw. jeden beliebigen Winkel zur x-Achse bilden können, gibt es auf einem n×n-Schachbrett nur eine begrenzte Zahl möglicher *Strahlen*. In der Definition der Schachsteine werden bestimmte Strahlen (bzw. die sie erzeugenden Vektoren oder Bewegungen) bestimmten Steinen zugeordnet. Die Systematik der Strahlen folgt der Klassifikation der Vektoren; die grundlegende Unterscheidung ist zwischen der „geraden“ Bewegung des Turms und der „diagonalen“ Bewegung des Läufers. Eine wichtige Anwendung der Theorie der Strahlen sind die Schnittpunkte, mit denen sich die Angriffsmöglichkeiten von Steinen berechnen lassen.

Wenngleich der Strahl ein mehr qualitativer Begriff ist – jedenfalls verglichen mit der Geometrie – so lassen sich für die Schachbrett-Strahlen doch ordinale Äquivalente zu den metrischen Größen angeben. Ein naheliegendes Maß für die Distanz zweier Felder (oder die Größe von Vektoren) besteht darin, die beiden Komponenten-Beträge zu addieren zur *Blockdistanz*. Grundlegend für das Schachspiel ist aber ein zweiter Distanzbegriff. Er bestimmt die Entfernung zweier Felder durch die größere der beiden Komponentenbeträge. Dieser Distanzbegriff soll *Königszug-Distanz* heißen, denn er misst die Anzahl von Zügen, die der König vom einen zum anderen Feld benötigt. Die Königszug-Distanz ist vor allem deshalb so charakteristisch für die Schach-Geometrie, weil durch sie der diagonale Schritt einem Schritt in der Geraden gleichgestellt wird (wie in 1.1 gesagt: Diagonale = Seitenlänge).

Die Konzepte Vektor, Strahl und Distanz und damit zusammenhängende Begriffe sind in dem Sinne allgemein, dass sie unabhängig von der *Begrenzung* des Schachbretts auf eine „Länge“ n × n sind. Die fundamentale Rolle des *Brettrands* ist jedem Schachspieler geläufig. Gleichrangig dazu ist die damit eng verbundene *Mitte* des Bretts, vor allem in Form des so genannten „Zentrums“. Weniger geläufig ist vielleicht, dass auch das einzelne Feld die Rolle eines Mittelpunkts haben kann. Nicht nur dass der König auf seinem Feld genau die Mitte des „Königsbereichs“ (d.h. die Felder, die er nach den Zugregeln kontrolliert oder betreten kann) bildet; das einzelne Feld kann auch als Mittelpunkt größerer Bereiche und des Bretts insgesamt fungieren. Hier spielt die Geradzahligkeit oder Ungeradzahligkeit des Bretts eine Rolle: ein 7×7- oder ein 9×9-Brett haben ein einzelnes Feld als exakten Mittelpunkt, die geradzahligen Bretter wie das vertraute 8×8-Brett haben ein Zentrum aus 4 Feldern – jedenfalls wenn man von dem Konzept eines „gerichteten Mittelpunkts“ (anstelle eines nur virtuellen Mittelpunkts) ausgeht.

Die mit der Mittelpunktsorientierung zusammenhängenden *Symmetrien* oder Asymmetrien betreffen keineswegs nur abstrakt-theoretische Betrachtungen, sondern haben große Auswirkungen auf das Spiel selbst. (Es sei, um nur einen Hinweis zu geben, an die Turmendspiele erinnert, wo die Asymmetrie von Bedeutung ist, dass der König auf einer Geraden, etwa der Grundreihe stets auf der einen Seite einen größeren und auf der anderen Seite einen kleineren Abstand zum Rand hat.)

Bezieht man die Grenzen des Bretts, den Brettrand, mit ein, so werden Strahlen zu *Basisstrecken*, das sind insbesondere die *Geraden* und *Diagonalen*, die sich von Rand zu Rand erstrecken und in die das ganze Brett zerlegt werden kann. Weiter werden Teilungen des Bretts und Abgrenzungen von *Gebieten* wie Quadrate und Dreiecke diskutiert.

Mit dem Distanzbegriff läßt sich nach dem Strahl der zweite Zentralbegriff der Schachgeometrie bestimmen: der *Ring*, der das Äquivalent sowohl zum klassischen Begriff des Kreises als auch des Quadrats bildet. Der Mittelpunkt eines Schachbrett-„Kreises" ist – je nach Geradzahligkeit oder Ungeradzahligkeit der Dimensionslänge n – ein einzelnes Feld oder ein Zentrum. Zu unterscheiden sind einerseits allgemeine oder *freie* Ringe, die ein beliebiges Feld oder ein beliebiges Zentrum zum Mittelpunkt haben und auch auf dem unbegrenzten Schachbrett definiert sind, und andererseits *Brettringe*, d.h. Ringe für ein Brett mit bestimmter Länge n. Als Pendant zum Kreis wie zum Quadrat der Geometrie sind Ringe sowohl durch einen *Radius* wie auch durch eine *Seitenlänge* charakterisiert. Der Ring mit dem größten Radius eines gegebenen n × n-Bretts ist zugleich dessen *Umfang*, d.h. der Rand dieses Bretts. Von besonderer Bedeutung ist der Ring um ein Feld mit Radius 1, der „Bereich" dieses Feldes, denn er beinhaltet die Zugmöglichkeiten des Königs.

Alle bisher umrissenen Konzepte der Schachgeometrie verbleiben im Rahmen der natürlichen Koordinaten und der Lagebestimmungen wie rechts, oberhalb usw. Ich habe früher ausführlich die generell begriffliche Natur des Schachwissens aufgewiesen (s. Band 1, Kapitel 2, sowie den Anhang I dieses Buches über Kognitive Architektur). Speziell für die Schachgeometrie ist in dieser Hinsicht grundlegend, dass zwischen den Koordinaten der Felder und dem Spielziel (sei es als Matt oder als Remis) keinerlei Beziehung besteht: Das Matt (oder welche Konstellation auch immer) kann sich in den verschiedensten Gebieten des Schachbretts abspielen, anders als bei Brettspielen mit wettlaufartigem Charakter wie zum Beispiel Mensch-Ärgere-Dich-Nicht. Bei den letzteren gibt es einen oder mehrere ganz bestimmte Punkte auf dem Brett, die als solche wichtig sind und nicht durch beliebige andere Punkte ersetzbar sind. Beim Schach dagegen kann z.B. der König auf ausnahmslos jedem Feld matt werden.

In diesem Sinne ist das natürliche Schachbrett mit den einzelnen Felder-Koordinaten *absolut*, d.h. für sich selbst stehend, ich spreche in diesem Zusammenhang auch von dem *absoluten Brett*. Für die schachspezifischen Konzepte ist das absolute Brett bedeutungslos. So gibt es beispielsweise keinerlei schachtheoretische Begriffe, die davon ausgehen, dass dieser und jener Stein gerade auf e6 stehen sollte; vielmehr geht es immer um *relative* Positionen, etwa dass ein Stein *hinter* dem Bauern oder *zwischen* König und Turm stehe usw. Damit muss die Schachtheorie auf *relativen Koordinaten* aufgebaut werden und muss damit auch völlig unabhängig von den Raumbestimmungen wie „rechts/links" formuliert werden. Dies ist eine der fundamentalen Bedingungen der Schachtheorie und bildet die Aufgabe der Schach(brett)-*Topologie*.

Als *topologische Charakteristik* eines Feldes f bezeichne ich die Menge aller Bewegungen, die von f aus möglich sind (bzw. die Menge aller Nachbarschaften von f zu anderen Feldern, dargestellt durch die entsprechenden Vektoren). Als *topologisch äquivalent* (im strengen Sinne) gelten zwei Felder, wenn ihre Charakteristik die gleiche ist – dies gilt zum Beispiel für die Eckfelder eines Rings. Die praktische Aufgabe der Topologie ist die Relativierung der Koordinaten je nach dem schachlichen Zusammenhang. Die *Relativierung* erfolgt grob in 3 Schritten:

1. Wahl eines Nullpunkts – bei Mattbildern beispielsweise wird dies das Feld des mattgesetzten oder mattzusetzenden Königs sein – mit der Bestimmung der topologischen Äquivalenzen, und der Relativierung der Brettkoordinaten auf diesen Nullpunkt;
2. die Relativierung der Dimensionen;
3. (in jeder der Dimensionen) die Relativierung der Richtungen.

Das Prinzip der „Relativierung“ in Schritt 2 und 3 besteht darin, eine bestimmte Dimension und bestimmte Richtungen als „Standard“ zu wählen und die Position der zu relativierenden Koordinaten bzw. deren Richtungsvorzeichen umzukehren, wenn die gegebene konkrete Brettposition diesem Standard nicht entspricht. Über die Relativierungsschritte ist ein Protokoll zu führen, damit die relativierten Koordinaten anschließend wieder zu ihren originalen Koodinatenwerten *zurückgerechnet* werden können.

Was die Darstellung betrifft, so entwickele ich die schachgeometrischen Konzepte, soweit es von der Sache her gegeben ist, jeweils zunächst für eine Dimension alleine und dann für das eigentliche, das zweidimensionale Schachbrett. Weiterhin behandle ich, wo es angezeigt ist, die geometrischen Konzepte zuerst für den allgemeineren Fall, d. h. für das unbegrenzte Brett, also unabhängig von der Begrenzung das Schachbretts auf n×n Felder, und dann für das allgemeine n×n-Brett. Das spezielle 8×8-Brett wird in der Regel nur zur Veranschaulichung herangezogen.